

Фізико-математичні науки

УДК 512.548

Сохацький Федір Миколайович

*доктор фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри прикладної математики
Донецький національний університет імені Василя Стуса*

Кірка Діана Василівна

*студент
Донецького національного університету імені Василя Стуса*

ПРОДОВЖЕННЯ ТЕРНАРНИХ КВАЗІГРУП. ОЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАД

Анотація. В статті вперше вивчаються методи продовження тернарних квазігруп. Введено поняття унарної та бінарної діагоналей куба, а також унарної та бінарної трансверселей куба. Запропоновано алгоритм побудови латинського куба порядку $n+1$ з латинського куба порядку n . Проілюстровано даний алгоритм на прикладі при $n=5$.

Ключові слова: тернарна квазігрупа, діагональ, трансверсаль, продовження квазігруп, латинський куб.

Квазігрупи широко використовуються в дискретній математиці і теорії множин, також їх застосовують в комбінаториці, криптографії та в інших галузях «комп'ютерної» математики. Зв'язок між квазігрупами та латинськими квадратами, а також зв'язок між квазігрупами та сітками відомий вже давно (В.Д. Білоусов та А.С. Бектенов (1979), О. Чейн, Г.О. Плюгфельдер та Дж. Сміт (1990) тощо). Проблемою продовження латинських квадратів займалися такі математики, як Ж. Денес, А.Д. Кідвел, Г.Б. Білявська, І.І. Дерієнко, В.А. Дудик, Р. Х. Брук, В.А. Щербаков та ін.

Одним із основних методів побудови квазігруп є їх продовження. Продовження квазігруп - це спосіб побудови скінченної квазігрупи порядку $n+k$ ($k \leq n$) з квазігрупи порядку n . Але на теперішній момент існують лише методи продовження бінарних квазігруп.

Під продовженням квазігруп ми маємо на увазі алгоритм побудови з квазігрупи порядку n квазігрупи порядку $n+k$ приєднанням до даної k додаткових елементів. Іншими словами, для бінарних квазігруп цей алгоритм показує, як заданий латинський квадрат продовжити на новий латинський квадрат за допомогою приєднання додаткового рядка та стовпця.

Перша спроба продовження була запропонована Р. Х. Бруком [1], який розглядав лише випадок ідемпотентних квазігруп. Згодом Дж. Денесом та К. Пастором [2] було запропоновано більш загальний метод побудови продовжень. Подальші узагальнення для спеціальних типів квазігруп, обговорювалися в [3] та [4] В. Д. Білоусовим. Насправді конструкція, запропонована В. Д. Білоусовим, є більш узагальненою формою конструкції, запропонованої Дж. Денесом та К. Пастором. Г. Б. Білявська вивчала цю проблему разом із оберненою задачею, тобто з проблемою, як із заданого латинського квадрата порядку n можна отримати латинський квадрат порядку $n-1$. Квазігрупи, отримані в результаті побудови запропоновані Г. Б. Білявською не є ізотопами для квазігруп, отриманих конструкцій, запропонованих Р. Х. Бруком та В.Д. Білоусов. Це означає що існує два різні методи побудови подовжень. Також існує третій метод, описаний І. Дерієнком та А. Дудеком [5], його можна застосувати до будь-якої квазігрупи порядку n із властивістю, що її таблиця множення має часткову трансверсаль довжиною $n-1$, тобто послідовність $n-1$ різних елементів, що містяться в окремих рядках та окремих стовпцях. В.А. Щербаков у своїй статті «Prolongation of quasigroups» присвяченій Галині Борисівні Білявській також описував

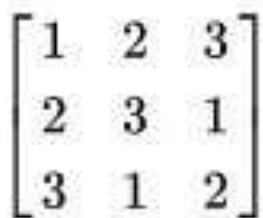
методи продовження латинських квадратів розмірності $n=3$ до латинського квадрата розмірності $n+k$, де $k=1,2,3$ відповідно. Також в цій статті описано Білявську модифікацію для часткової трансверсалі [6].

Метою роботи є введення основних означень які стосуються латинських кубів, а також продовження тернарних квазігруп на прикладі квазігрупи розмірності $n=5$ до квазігрупи $n=6$. Об'єктом є квазігрупи в цілому та методи їх продовження, предметом будуть тернарні квазігрупи та їх продовження.

В даній роботі вперше зображено один із найпростіших методів продовження тернарної квазігрупи на прикладі квазігрупи розмірності $n=5$. Також вперше вводяться поняття унарної та бінарної діагоналі та трансверсалі латинського куба.

Для початку нагадаємо основні означення: Нехай $Q := \{1, 2, 3, \dots, n\}$, f та g - деякі операції на Q , тоді бінарна квазігрупа – це впорядкована пара (Q, f) , де Q – множина, f – бінарна операція, визначена на Q така, що кожне із рівнянь $f(a, y) = b$, $f(x, a) = b$ однозначно розв'язне для будь-якої пари елементів a, b із Q [7].

Латинським квадратом називається таблиця розміру $n \times n$ заповнена n різними елементами так, що в кожному стовбці і кожному рядку всі елементи зустрічаються по одному разу. Прикладом латинського квадрата порядку $n=3$.



1	2	3
2	3	1
3	1	2

Рис. 1. Приклад латинського квадрата [1]

Будь-який латинський квадрат є таблицею множення квазігрупи. Якщо в першому рядку і в першому стовпці елементи йдуть у зростаючому

порядку (як у поданому вище прикладі), то такий квадрат називається *нормалізованим*. Очевидно, що будь-який квадрат можна звести до нормалізованого за допомогою перестановки рядків і стовпців.

Перейдемо безпосередньо до продовження тернарних квазігруп, а саме продовження латиського кубу. Для цього введемо основні означення:

Тернарна квазігрупа (або 3-квазігрупа) – це пара (Q, g) де Q – множина, а тернарна операція g задовольняє умовам: для довільних a, b, c із Q кожне з рівнянь

$$g(x, a, b) = c, \quad g(a, y, b) = c, \quad g(a, b, z) = c \text{ має єдиний розв'язок [8, с. 292].}$$

Куб це масив який складається з усіх трійок чисел із множини $Z_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Рядком, який визначається парою (a, b) називатимемо сукупність трійок куба виду $R_{ab} := \{(a, y, b) \mid y \in Z_n\}$ (друга координата вільна, а дві інші фіксовані)

1	2	3

Рис. 2. Приклад рядка

Джерело: розробка автора

Стовбцем, який визначається парою (a, b) називатимемо сукупність трійок куба виду $R_{ab} := \{(a, b, z) \mid z \in Z_n\}$ (третя координата вільна, а дві інші фіксовані)

1		
2		
3		

Рис. 3. Приклад стовпця

Джерело: розробка автора

Стрічкою, яка визначається парою (a,b) називатимемо сукупність трійок куба виду $R_{ab} := \{(x,a,b) | x \in Z_n\}$ (перша координата вільна, а дві інші фіксовані)

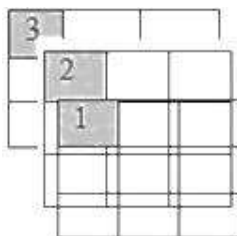


Рис. 4. Приклад стрічки

Джерело: розробка автора

Шаром називатимемо сукупність комірок у яких одна координата фіксована, дві інші вільні, отже є три типи шарів:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Рис. 5. Приклад шару

Джерело: розробка автора

стрічний шар перпендикулярний до стрічки, тобто $C_{1a} := \{(x,a,b) | x \in Z_n\}$

рядковий шар перпендикулярно до рядка, тобто $C_{2b} := \{(a,y,b) | y \in Z_n\}$

стовбцевий шар перпендикулярно до стовбця, тобто $C_{3c} := \{(a,b,z) | z \in Z_n\}$

Зауважемо, що дві комірок з координатами (a,b,c) та (a',b',c') не знаходяться в одному шарі, якщо $a \neq a', b \neq b', c \neq c'$

Одновимірною (унарною) діагоналлю куба називаємо сукупність із n комірок, кожні дві з яких не знаходяться в одному шарі. Тобто $D_u := \{(a_i, b_i, c_i) | i=1,2,...,n\}$ таких, що виконується умова $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$, при $i \neq j$.

Одновимірною (унарною) трансверсальною латинського куба називатимемо таку його одновимірну діагональ, в якій всі елементи різні. Унарна трансверсаль є підстановкою.

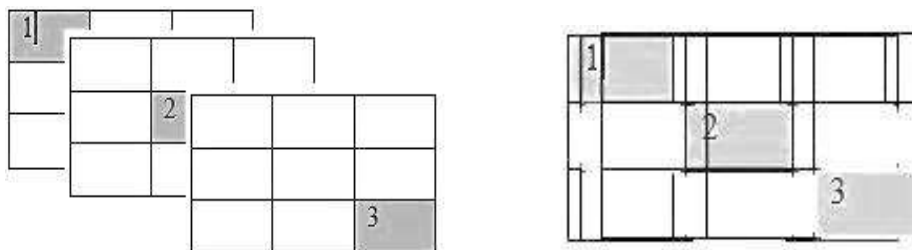


Рис. 6. Приклад одновимірної трансверсалі по шарах та при накладенні шарів

Джерело: розробка автора

Двовимірною (бінарною) діагоналлю куба називатимемо сукупність із n^2 комірок таких, що в кожному рядку, кожному стовпці і в кожній стрічці знаходиться рівно по одній комірці, а це і означатиме, що при проектуванні на будь яку з граней вони дадуть повний квадрат.

Двовимірна (бінарна) трансверсаль латинського куба, це двовимірна діагональ, яка при проектуванні в рядковому напрямку дає латинський квадрат, при проектуванні в стовбцевому напрямку дає латинський квадрат, а також при проектуванні в стрічному напрямку дає латинський квадрат.

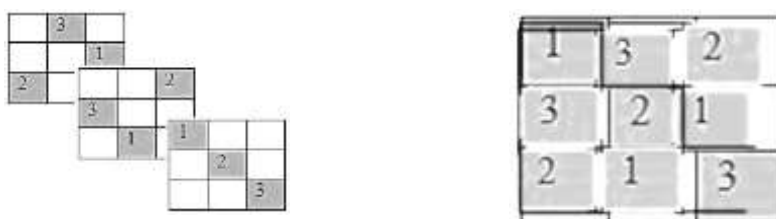


Рис. 7. Приклад двовимірної діагоналі по шарах та при накладенні шарів

Джерело: розробка автора

Дві трансверсалі називаються попарно неперехресними, якщо неперехресні їхні діагоналі, тобто діагоналі не мають спільних комірок.

Кубом порядку n називатимемо сукупність комірок які індексовані елементами множини $Z_n^3 := Z_n \times Z_n \times Z_n$.

Латинський кубом називатимемо куб комірки якого заповнені n елементами, таким чином, що в кожному рядку, кожному стовпці і кожній стрічці кожен елемент зустрічається лише один раз.

3		1	2	
1	2		3	1
2	3	1	2	3
	1	2	3	1
	3	1	2	

Рис. 8. Прикладом латинського куба

Джерело: розробка автора

Приклад побудови тернарної квазігрупи при $n=5$.

1. Побудуємо латинський куб розмірності $n=5$ та розкладемо його за стрічним шаром.
2. Виділимо двовимірну діагональ куба, та зафіксуємо в ній одновимірну діагональ куба (одновимірна діагональ виділена жирним курсивом).
3. Будуємо ще по одному шару (рядковому, стовбцевому та стрічному), та винесемо елементи двовимірної діагоналі у нові шари. А на їх місце запишемо новий елемент.
4. На місця куди мали виноситися елементи унарної діагоналі записуємо новий елемент.
5. На ребро що утворилося на стику стовбцевого та рядкового шарів записуємо елементи унарної діагоналі.
6. На порожні місця записуємо новий елемент.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

(1 шар)

1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4

(2 шар)

2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0

(3 шар)

3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1

(4 шар)

4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2

(5 шар)

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

(1 шар)

1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4

(2 шар)

2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0

(3 шар)

3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1

(4 шар)

4	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2

(5 шар)

Рис. 9. Приклад виконання першого та другого етапів продовження латинського куба

Джерело: розробка автора

0	1	2	3	4	5
1	2	3	5	0	4
2	5	4	0	1	3
3	4	0	1	5	2
4	0	5	2	3	1
5	3	1	4	2	0

(1 шар)

1	2	5	4	0	3
5	3	4	0	1	2
3	4	0	5	2	1
4	5	1	2	3	0
0	1	2	3	4	5
2	0	3	1	5	4

(2 шар)

2	3	4	0	5	1
3	4	5	1	2	0
5	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5
1	5	3	4	0	2
4	2	0	5	1	3

(3 шар)

3	5	0	1	2	4
4	0	1	2	5	3
0	1	2	3	4	5
5	2	3	4	0	1
2	3	4	5	1	0
1	4	5	0	3	2

(4 шар)

4	0	1	2	3	2
0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	0	0
2	3	4	0	1	4
3	4	0	1	2	3
3	5	4	2	0	1

(5 шар)

5	4	3	2	1	0
2	5	0	4	3	1
4	3	5	1	0	2
1	0	4	5	2	3
3	2	1	0	5	4
0	1	2	3	4	5

(6 шар)

Рис. 10. Приклад виконання з третього по шостий етапів продовження латинського куба

Джерело: розробка автора

Висновки. Запропонований метод дозволяє продовжити квазігрупу порядку n до квазігрупи порядку $n+1$. Це розширить можливості продовження квазігруп та дасть змогу узагальнити вже існуючі результати продовження бінарних квазігруп, на випадок латинського куба

Література

1. Bruck R. H. Some result in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 55. 1944. PP. 19-52.
2. Dènes J. and Pásztor K. Some problem on quasigroups, (Hungarian), Magyar Tud. Akad. mat. fiz. Oszt. Közl. 13. 1963. PP. 109-118.
3. Belousov V. D. Extensions of quasigroups, (Russian), Bul. Akad. tiinçe RSS Moldoven 1967. No. 8. PP. 3-24.
4. Belyavskaya G. B. Contraction of quasigroups, I, (Russian), Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR, ser. Fiz.-tehn. mat. Nauk 1. 1970. PP. 6-12.
5. Deriyenko I. I. and Dudek W. A. On prolongations of quasigroups, Quasigroups and Related Systems 16. 2008. PP. 187-198.
6. Shcherbacov V.A. Prolongations of quasigroups - Mathematics Subject Classification: 2015. 20N05, 05B15.
7. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967. 223 с.
8. Ji, Lijun Wei R. The spectrum of 2-idempotent 3-quasigroups with conjugateinvariant subgroups // Journal of Combinatorial Designs 2010. Vol. 18. No4. PP. 292-304.